位相多様体の三角形分割について

玉 村 章 枝

§ 0 序 論

本稿の目的は，次の主定理を証明することにある．

主 定 理

K を n 次元ユークリッド空間 R^n に embed されている k 次元単体的複体，N を R^n における K の正則近傍で，K に collapse する PL 多様体，f を，N を m 次元ユークリッド空間 R^m へ locally unknotted に embed する写像とする．その時，$m-k \geq 3$，$m-n<3$ ならば，$\pi_1(R^m - f(N)) = \{e\}$ が成り立つ．

この定理は，多様体の分類問題，とりわけ位相多様体の三角形分割問題の中の一課題「位様多様体の中で，複体としては三角形分割されているが，組合せ多様体としては三角形分割されてないものがあるか。」を追求している過程で得られた1つの結果である．この定理の位置付けを明らかにする為に，§1で多様体の分類問題について，§2で位相多様体の三角形分割について示す．又定理を証明する際重要な役割をする正則近傍定理と，Covering isotopy 定理を §4 と §5 で記し，§6 で定理の証明を示す．

§ 1． 多様体の分類問題

多様体には位相多様体，組合せ多様体，微分多様体があり，それらの多様体はそれぞれ，同相，組合せ同相，微分同相で分類される．この他，位相空間は同じホモトピー型をもつかどうかで分類される。

定義1－1　位相空間 (X, A) (Y, B) に対して，連続写像 $f:(X, A)\to(Y, B)$, $g:(Y, B)\to(X, A)$ が存在して，$g\cdot f$ と $f\cdot g$ が恒等写像にホモトープなとき，(X, A) と (Y, B) とは同じホモトピー型をもつという．

定義1－2　連続写像 $f: X\to Y$ が全単射で，逆写像 $f^{-1}: Y\to X$ も連続であるとき f を同相写像という．ハウスドルフ空間 M は，各点 P が R^n または H^n のどちらかと同相な開近傍 U(P) をもつとき，n 次元位相多様体とよばれる．

定義1－3　複体 K，L に対して，それらの細分 αK，βL が存在して，同形となるとき，K と L は組合せ同相とよばれる．パラコンパクト多面体 $M=|K|$ は，その分割複体 K の任意の頂点の星状体が n 単体と同相のとき，n 次元組合せ多様体とよばれる．

定義1－4　n 次元位相多様体 M の座標近傍系を $S=\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ $\alpha\in A$ とする．S に属する任意の座標近傍 (U_α, ψ_α)，(U_β, ψ_β) に対して，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ ならば，$\psi_\beta\cdot\psi_\alpha^{-1}$ は R^n の開

集合 $\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ から R^n の開集合 $\psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ への同相写像である．R^n の座標 $(x_1 \cdots x_n)$ をつかって，$(\psi_\beta \cdot \psi_\alpha^{-1})(x) = (f_{\beta\alpha}^1(x_1 \cdots x_n), \cdots, f_{\beta\alpha}^n(x_1 \cdots x_n))$ という形に表わすことができる．n 個の関数 $f_{\beta\alpha}^1$, ……, $f_{\beta\alpha}^n$ が任意の α, $\beta \in A$（ただし $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$）に対して，$r$ 回連続微分可能であるとき，S を C^r 級座標近傍系とよぶ．n 次元位相多様体 M が C^r 級座標近傍系 S をもつとき，M と S の組 (M, S) を n 次元 C^r 級微分可能多様体（ただし $1 \leq r \leq \infty$）という．

φ を C^∞ 多様体 M から C^∞ 多様体 M′ への連続写像とする．M′ 上の任意の C^r 級関数 f' に対して，M 上の関数 $f' \cdot \varphi$ が C^r 級であるとき，φ を C^r 級微分可能写像という．φ が M から M′ の上への同相写像で，φ と φ^{-1} がともに C^r 級のとき，φ を C^r 級微分同相写像という．

J. H. C. whitehead により「どんな微分可能多様体も，なめらかな三角形分割をもち，微分可能多様体のなめらかな三角形分割は組合せ多様体となる．しかも，ある微分可能多様体が 2 つのなめらかな三角形分割をもったとすれば，それらはお互いに組合せ同相になる．」ことが分っている〔10〕ので，微分可能多様体は，組合せ多様体と考えてよい．同様にして，組合せ多様体は，位相多様体，位相多様体はホモトピー型と考えてよいから，次のような包含関係がある．

微分可能多様体⊂組合せ多様体⊂位相多様体⊂ホモトピー型．

J. Milnor が，微分可能多様体の指数定理に基づいた微分構造の不変量を導入して，7 次元球面 S^7 の上に，S^7 と同相ではあるが，微分同相ではないものを構成した〔9〕(実際には，S^7 の上には28通りの異なった微分可能構造が入る〔6〕) ことより，多様体間の関係を調べる事が興味ある問題とされるようになった．それが多様体の分類問題である．

多様体の分類問題　微分可能多様体→組合せ多様体→位相多様体→ホモトピー型において．

(1) 右の構造が与えられたとき，それと compatible な左の構造が存在するか．

(2) Compatible な構造は，唯 1 つに限るか（一意性の問題）．

(3) Compatible な構造が 1 つでない場合，その構造の数はいくつか．

たとえば，n 次元球面 S^n とホモトピー型が等しい左の構造を調べると，位相多様体では，$n \neq 3$, 4 のとき唯 1 つ存在し，n＝3, 4 のときは分っていない（ポアンカレ予想)．組合せ多様体でも，$n \neq 3$, 4 のとき唯一つ存在し，n＝3, 4 のときは分っていない．微分可能多様体では n＝1, 2, …, 18 迄は数が分っている〔6〕が，この場合も n＝3 のときは分っていない。また，組合せ多様体が微分構造をもち得るかという問題に対しては kervaire の反例〔5〕がある．位相多様体の三角形分割とその一意性の問題もこのような分類問題の 1 つである．

§ 2. 位相多様体の三角形分割

位相多様体の三角形分割とその一意性の問題

(1) M を位相多様体とすると，組合せ多様体 K が存在して，M と |K| が同相になるか．

(2) (1) をみたす組合せ多様体が 2 つ K, L 存在したとすると，K と L は組合せ同相になるか．

$n=1, 2, 3$ のとき，肯定的に解かれている．$n=4$ のときは分っていない．$n\geq 5$ のときは，Kirby-Siebenmann より否定的に解かれている〔7〕,〔8〕．その時の障害は $H^4(M, \pi_3(TOP/PL))=H^4(M, Z_2)$ の元である．その障害を Kirby-Siebenmann の類といい，$K(M)$ とかく．

ところで問題を次のように進めてみる．

課題　複体としては三角形分割されるが，組合せ多様体とはならない位相多様体があるか．

もし，このような位相多様体 M があれば，$K(M)\neq 0$ で，しかも三角形分割できる多様体が存在することになる．

定義 2—1　M がホモトピー n 多様体とは，M が，M の組合せ構造における任意の三角形分割に対して，各 i 単体の link が $(n-i-1)$ 球面か，$(n-i-1)$ 球体と同じホモトピー型をもつ多面体になることである。

定義 2—2　M の resolution は，V を組合せ多様体，$f:(V, \partial V)\rightarrow(M, \partial M)$ を各 $f^{-1}(x)$ が可縮で，各 $(f|\partial V)^{-1}(x)$ が．collapsible となるような compact point-inverses な組せ全射写像とするとき (V, f) で定義される．

位相多様体とホモトピー多様体及び組合せ多様体の関係については，定義より組合せ多様体ならばホモトピー多様体である．また，Siebenmann〔11〕より $n\neq 4$ ($n=5$ のときは ∂M が位相多様体) ならば任意の連結した単体的ホモトピー n 多様体は位相多様体になる．この逆を次の 3 段階に分けて追及することによって，上記の課題を調べよう．

(1)　位相多様体 M の三角形分割 K はホモトピー多様体になるか．

(2)　ホモトピー多様体ならば resolution をもつか．

(3)　resolution があれば，組合せ多様体となるか．

(2)　については，Sullivan〔13〕より，ホモトピー多様体が resolution をもつ為の条件が明らかにされている．

定理 (Sullivan〔13〕)　ホモトピー多様体 M が resolution をもつ為の必要かつ十分条件は $z=0$ となる元 $z\in H^4(M, \partial M:\Theta_3)$ が存在することである．ただし，Θ_3 はホモトピー 3 球面の h一同境類である．

注意　$\Theta_3=0$ ならば，$z=0$ となるから，古典的な Poincaré 予想が成り立っていれば，ホモトピー多様体は常に resolution をもつことが分る．

(3)　については，次の定理より肯定的に解かれている．

定理 (Cohen〔1〕)　$n\geq 6$ ($n=5$ のときは $\partial M=\phi$) に対して，M をホモトピー多様体，d を M における距離とする．(V, f) を M の任意の resolution，$\varepsilon: V\rightarrow R^1$ を正値写像とするならば，すべての x に対して $d(h(x), f(x))<\varepsilon(x)$ となる同相写像 $h: V\rightarrow M$ が存在する．

(1)　については，次の一般 Supension 問題が位相多様体の勝手な単体的三角形分割を考える上で鍵となっている．

一般 Suspension 問題　$n \geq 3$ (整数), H^n を単連結でないホモロジー n 球面とすると, $S^{k-1} * H^m$ が $(n+k)$ 次位相多様体となるような $k \geq 2$ が存在するか.

さらに一般 Suspension 問題を E^{n+1} における分解問題へ還元したものが S. D. S. 問題である.

Simplified Double Suspension 問題 (S. D. S.)　整数 $n \geq 4$ に対して, E^n の組合せ三角形分割内で $\pi_1(E^n-K) \neq 0$ となる有限な可縮部分複体が存在するならば, $(E^n/K)\times E^1$ は locally Euclidean になるか.

S. D. S. 問題の肯定的解は一般 Suspension 問題の肯定的解と同値であり, S. D. S. 問題の否定的解は 6 つの予想と同値になっている.

定理 (Glaser 〔2〕)　S. D. S. 問題の肯定的解は一般 Suspension 問題の肯定的解と同値である.

定理 (Glaser 〔2〕)　S. D. S. 問題の否定的解は次の予想と同値である.

(1)　K を $E^n (n \geq 4)$ における有限複体でありその正則近傍が, 単連結でない境界をもつものとするならば, $(E^n/K)\times E^k$ は, すべての $k \geq 0$ に対して locally Euclidean とならない.

(2)　M^n を境界のない位相 n 多様体, T を M の三角形分割とすると T は単体的ホモトピー n 多様体である.

(3)　K^n は任意の有限 n 次単体的複体であり, ある $k \geq 1$ に対して, $\Sigma^k K^n \approx S^{n+k}$ となっているならば, $n \neq 3, 4$ のとき, K^n は S^n に同相, K^3 は PL ホモトピー 3 次元球面, K^4 は S^4 とホモトピー同値な単体的ホモトピー 4 次元多様体となる.

(4)　M^n が境界のない n 次元位相多様体, T が M の三角形分割ならば T の各開単体は $|T|$ において locally flat になる.

(5)　$n=3, 4$ のとき, Poincaré 予想が成り立っているならば, 全ての三角形分割された n 次元位相多様体は, 組合せ多様体である.

(6)　M^n を三角形分割 T をもつ n 次元閉多様体, K を T の部分複体で, $|K|$ が k 次元閉多様体となっているものとする. $n-k \neq 2$ ならば, $|K|$ は $|T|$ において topologically locally flat である.

以上の事から課題を追求する為には, S. D. S. 問題の条件をみたす複体を具体的に見つけて, つまり $\pi_1(E^n-K) \neq 0$ となる PL 三角形分割の有限可縮部分複体 $K(\subset E^n)$ をみつけて, $(E^n/K)\times E^1$ が locally Euclidean になっているかどうかを調べなければならない. § 6 で示す主定理はその為の 1 つの結果である.

§ 3　準　備

以後多様体はすべて組合せ多様体とする.

§ 3. § 4. § 5 における証明は, 主に Zeeman 〔14〕 の証明に依処し, Glaser〔3〕 と Hudson 〔4〕 を参照とした.

定義 3—1　K, L を複体とする. $K \supset L$ で, $K-L$ が自由な辺をもつ K の単体 A からでき

ている時，K から L への elementary simplicial collapse があるという．ゆえに，$A=aB$ ならば $K=L\cup A$，$a\dot{B}=L\cap A$ で，A を $a\dot{B}$ 上に collapse する，あるいは A を B から collapse するという．

K から L への elementary simplicial collapses の列が存在する時，K は L に simplicial に collapse するといい，$K\overset{S}{\searrow}L$ とかく．L が一点の時は，K を Simplicially collapsible といい，$K\overset{S}{\searrow}0$ とかく．

多面体に対しても同様の定義ができる．$X\supset Y$ が多面体であり，$X=Y\cup B^n$，$B^{n-1}=Y\cap B^n$ となる $B^n>B^{n-1}$ が存在する時，X から Y への elementary collapse があるという．X から Y への elementary collapse の列が存在する時，X は Y に collapse するといい，$X\searrow Y$ とかく．Y が一点のとき X を collapsible といい，$X\searrow 0$ とかく．

定義 3—2　K，J は複体で，$K\subset J$ とする．J−K の単体で，そのすべての頂点が K 内にあるものがないならば，K は J で full であるという．K が J で full ならば，$f^{-1}0=K$ となる単体写像 $f: J\to I$（単区間）が唯1つ存在している．

定義 3—3　J を複体，$X\subset|J|$ とする．単体的近傍 N (X, J) は X と交わる J の閉単体とその辺をすべて集めたものである．

X を n 次元多様体 M 内の多面体，J と K を M と X の三角形分割とする．$J^{(r)}$ を J の r 回 derived 細分された複体とすると，$N=N(X, J^{(r)})$ を M における X の r 次 derived 近傍という．r= 1 で，K が J で full のとき，N を M における X の derived 近傍という．$K^{(r-1)}$ は $J^{(r-1)}$ で full だから，r 次 derived 近傍は derived 近傍と考えられる．

定義 3—4　X を多様体 M における多面体とする．M における X の正則近傍 N とは，① N が M における X の近傍である，② N が n 次元多様体（n=dimM）である，③ $N\searrow X$，を満たす多面体のことである．

補題 3—1　2つの球体の境界間の任意の同相写像は，内部にまで拡張できる．

補題 3—2　$B^{n-1}<B^n$，$\triangle^{n-1}<\triangle^n$ ならば，任意の同相写像 $B^{n-1}\to\triangle^{n-1}$ は同相写像 $B^n\to\triangle^n$ へ拡張できる．

系 3—3　2つの球体が共通の辺で交わっていれば，それらの和集合も球体である．

補題 3—5　$K\searrow L$ ならば，$K'\overset{S}{\searrow}L'$ となる K，L の細分 K'，L' が存在する．

補題 3—6　M^n，Q^n を多様体とする．M^n が $\mathring{Q}^n$ の閉部分集合ならば，$\overline{Q^n-M^n}$ は多様体である．

定義 3—5　$f: M\to Q$ において，$f^{-1}\dot{Q}=\dot{M}$ のとき，f を proqer という．とくに $\partial M=\phi$ のときは，M から $\mathring{Q}$ への任意の embed を proper という．Q の同相写像とは，Q から Q への同相写像を意味する．とくに同相写像は proper embedding である．

定義 3—6　M から Q への isotopy とは，proper level preserving embedding $F: M\times I\to Q\times I$ のことである．すべての $x\in M$ に対して，$F(x, t)=(F_t x, t)$ で定義される proper embedding $M\to Q$ を F_t とかく．Q の部分空間 $\bigcup_{t\in I}F_tM$ を，その isotopy によってできた軌跡という．

$X \subset M$ のとき，すべての $x \in X$ と $t \in I$ に対して，$F(x, t)=F(x, o)$ となるならば，F は X を動さないという．M から Q への isotopy が存在して，$F_0=f$, $F_1=g$ ならば embedding $f, g: M \to Q$ が isotopic であるという．

定義 3—7　Q の ambient isotopy とは，$H(x, o)=id$ となる level preserving 同相写像 $H: Q \times I \to Q \times I$ のことである．H_t をすべての $x \in Q$ に対して，$H(x, t)=(H_t x, t)$ で定義する．すべての $t \in I$ に対して，$F_t=H_t F_0$ のとき，H は isotopy F を被うという．$H_1 f=g$ となる Q の ambient isotopy H が存在するとき，embedding $f, g: M \to Q$ を ambient isotopic という．

Q の同相写像か ambient isotopy が $Q-X$ を動さないとき，それは X で support されているという．連続性より X の Q における境界 $\overline{X} \cap \overline{Q-X}$ も動かない．

定義 3—8　Q の内部的 move とは，球体によって support された Q の同相写像で，球体の境界を動さないものである．Q の境界 move とは，$\dot{Q}$ と辺で交わる球体によって support された Q の同相写像である．$h_1 h_2 \cdots\cdots h_n f=g$ となる Q の move の有限列 $h_1, h_2, \cdots\cdots h_n$ が存在するとき，embedding f, g が moves による isotopic であるという．

定義 3—9　$f: M \to Q$ を proper embeddimg, Q_0 を Q における $f(M)$ の正則近傍とする．K, L を，$f: K \to L$ が単体写像となるような M, Q_0 の三角形分割とする．f が locally unknottd embedding とは，各頂点 $v \in K$ に対して，対 $(lk(fv, L), f(lk(v, K)))$ が unknotted となることである．embedding が proper だから，対は $v \in \mathring{M}$ か，$v \in \dot{M}$ によって球か球体の対になる．

定義 3—10　isotopy $F: M \times I \to Q \times I$ が locally unknotted とは，① 各 level $F_t: M \to Q$ が locally unknotted embedding であって，② 各部分区間 $J \subset I$ に対して，制限 $F: M \times J \to Q \times J$ が locally unknotted embedding のときである．

補題 3—7　$h: K \to K$ を，各単体をそれ自身に移し，部分複体 L は動さないような，複体間の同相写像とすると，h は L を動さないで恒等写像に ambient isotopic である．

系 3—8　M における X の任意の２つの derived 近傍が X を動さない ambient isotopic であって，$X \subset \mathring{M}$ ならば，その isotopy は $\dot{M}$ を動さないように選べる．

補題 3—9　境界を動さない球体から球体への任意の同相写像は境界を動さない恒等写像と isotopic である．

証明　１つの単体に対して証明すれば十分である．$h: \triangle \to \triangle$ が与えられているとき isotopy を次のようにして作る．$f: \triangle \times I \to \triangle \times I$ を，$t=0$ のときは，$f(x, t)=hx$, $t=1$ か $x \in \dot{\triangle}$ のときは，$f(x, t)=x$ とすると，f は $(\triangle \times I)^{\cdot}$ 上で level preserving になっている．$\triangle \times I$ の中心を $\triangle \times I$ の中心に写像させ，境界と線型に join させることによって，f を $\triangle \times I$ で level preserving になるように定義する．このとき f が求める isotopy である．

系 3—10　１つの辺を動さないような球体から球体への任意の同相写像は，その辺を動さない恒等写像と isotopic である．

§4　正則近傍定理

定理 4—1　M における X の任意の2つの derived 近傍は，X を動さないで同相となる．

証明　$N_1=N(X, J_1')$，$N_2=N(X, J_2')$ を与えられた2つの近傍とする．ただし，$|J_1|=|J_2|=M$．J_0 を J_1, J_2 の共通の細分とする．J_0 の1回 derived 細分を J_0' とし，$N_0=N(X, J_0')$ とする．X は J_1 で full だから，$f^{-1}0=X$ となる唯1つの単体写像 $f: J_1 \to I$ が存在する．$\varepsilon>0$ を，$x \in J_0$, $x \notin X$ となるすべての頂点に対して，$\varepsilon<fx$ となるように選ぶ．J_i^ε (i=0, 1)は，$fA=I$ のとき $A \in J_i$ を $f^{-1}\varepsilon$ 上で星状化し，それ以外のときは勝手に細分することによって作られた J_i の1回 derived 細分とする．そのとき，$|N(X, J_i^\varepsilon)|=f^{-1}(0, \varepsilon)$ となる．ゆえに，$N_1 \cong N(X, J_1^\varepsilon) \cong N(X, J_0^\varepsilon) \cong N_0 \cong N_2$.

系 4—2　M における X の任意の derived 近傍は X に collapse する．

定理 4—3　collapsible 多面体 X の derived 近傍は，n—球体となる多様体である．

証明　n に関する帰納法を使う．n=0 のときは明らかである．定理4—1より，ある特別な derived 近傍に対して定理の証明を行なえば十分である．その為に，$X=|K|$，$K \subset J$，J'' を J の2回重心細分された複体とし，2次 derived 近傍 $N=N(X, J'')$ を考える．X は collapsible だから，補題3—5より，$K \overset{S}{\searrow} 0$ となる K を選ぶことができる．

r を $K \overset{S}{\searrow} 0$ となる elementary simplicial collapse の数とする．r に関する帰納法で N が球体になることを示す．r=0 のとき，K は点だから，N は閉星状体となり，球体である．$K \searrow L$ を最初の elementary simplicial collapse とする．ただし，単体 $A=aB$ を B から collapse したとする．$\hat{A}$, $\hat{B}$ を A，B の重心とすると，$N=N(K, J'')=P \cup Q \cup R$，ただし，$P=N(L, J'')$，$Q=N(\hat{A}, J'')$，$R=N(\hat{B}, J'')$ となる．ところで．P は帰納法の仮定より球体である．Q，R は頂点の閉星状体だから球体となる．今．Q が P の上に共通の辺ではりつけられていることを示せば，系3—3より，$P \cup Q$ は球体になる．同様に，R が $P \cup Q$ 上に共通の辺ではりつけられていれば，N は球体になる．したがって，証明は $P \cap Q$ と $(P \cup Q) \cap R$ が (n−1) 球体であることを示せばよい．なぜなら，P, Q, R の内部は disjoint だから，$P \cap Q$, $(P \cup Q) \cap R$ が球体ならば，それらは共通の辺になっているから．

さて，$P \cap Q \subset \dot{Q}=lk(\hat{A}, J'')$，$J_*=lk(\hat{A}, J')$ とする．J_* のすべての C に対して，頂点写像 $\widehat{AC} \to \hat{C}$ を考えると，$\dot{Q} \to J'_*$ は同形となる．この同形の下で，$P \cap Q \to N(a\dot{B}, J'_*)$ も同形となる．ところが $a\dot{B}$ は錐体だから collapsible である．ゆえに，$N(a\dot{B}, J'_*)$ は collapsible 多面体の derived 近傍である．n に関する帰納法の仮定より，$N(a\dot{B}, J'_*)$ は (n−1) 球体となる．ゆえに．$P \cap Q$ は (n−1) 球体である．

同様に，$(P \cup Q) \cap R \subset \dot{R}$，$J_*=lk(\hat{B}, J')$ とすると，同形 $\dot{R} \to J'_*$ が $(P \cup Q) \cap R$ を $N(\hat{A}\dot{B}, J'_*)$ に移す．上と同じ理由から，$(P \cup Q) \cap R$ は (n−1) 球体になる．

定理 4—4　多様体 M^n と球体 B^n が共通の辺で交わっているとする．X を B^n と交わらない M^n の閉部分集合とする．そのとき，X を動さない M^n から $M^n \cup B^n$ への同相写像が存在する．

証明　X は閉集合だから M^n-X は多様体である．B^{n-1} を M^n と B^n との共通の辺とし，

A^n を M^n-X における B^{n-1} の derived 近傍とする．定理4－3より，A^n は球体となる．$\mathring{A}^n \subset \mathring{M}^n$ だから，B^{n-1} は $\mathring{A}^n$ と交わらない．しかも B^{n-1} は A^n の辺である．A^n, B^n は共通の辺 B^{n-1} で交わっているから，系3－3より，$A^n \cup B^n$ は球体である．$B_1^{n-1}=\dot{B}^n-\mathring{B}^{n-1}$ とすると，補題3－4より，B_1^{n-1} は球体である．

さて同相写像 h を作ろう．$(M^n-A^n)\cup(\mathring{A}^n-\mathring{B}^{n-1})$ 上で，h=id と定義する．とくに $h|x=id$ となる．$h=id:\dot{B}^{n-1}\to\dot{B}_1^{n-1}$ を補題3－1より，同相写像 $B^{n-1}\to B_1^{n-1}$へ拡張させる．同様にして，$h:\dot{A}^n\to(A^n\cap B^n)$ を内部に拡張させると h が求める性質をもつ．

定理 4—5 M^n, Q^n は多様体で，M^n は $\mathring{Q}^n$ の閉部分集合と仮定する．B^n を $\mathring{Q}^n$ における n 球体とし，M^n と共通の辺で交わっているとする．X を B^n で交わらない Q^n の閉部分集合とすると，$X\cup\dot{Q}^n$ は動さないで，M^n を $M^n\cup B^n$ に移す Q^n から Q^n への ambient isotopy が存在する．

証明　B^{n-1} を共通の辺とする．補題3－4より，$B_1^{n-1}=\dot{B}^n-B_1^{n-1}$ は球体である．定理4－4より，$M^n\cup B^n$ が多様体になるから．補題3－6より，$M_1^n=\overline{Q^n-(M^n\cup B^n)}$ は多様体になる．D^n を多様体 $Q^n-\dot{Q}^n-X$ における B^n の derived 近傍とすると，定理4－3より，D^n は球体である．$A^n=D^n\cap M^n$, $A_1^n=D^n\cap M_1^n$ とする．D^n を作るとき，M^n, B^n と交わる部分が D^n で部分複体となるように三角形分割を選んでおくと，A^n, A_1^n は，それぞれ M^n, M_1^n における B^{n-1}, B_1^{n-1} の derived 近傍となる．ゆえに，A^n, A_1^n は球体である．A^n は B^n と共通の辺 B^{n-1} で交わり，A_1^n は B^n と共通の辺 B_1^{n-1} で交わる．故に $A^n\cup B^n$, $A_1^n\cup B^n$ は系3－3より球体となる．

次に D^n から D^n への同相写像 h を次のようにして作る．$\dot{D}^n\cup(\mathring{A}^n-\mathring{B}^{n-1})$ 上では h＝1 と定義し，$h:B^{n-1}\to\dot{B}_1^{n-1}$ を補題3－1によって内部に拡張させる．同様にして，$A^n\to(A^n\cup B^n)^{\cdot}$ と $(B^n\cup A_1^n)^{\cdot}\to\dot{A}_1^n$ を内部に拡張させる．補題3－9より，恒等写像は $\dot{D}^n$ を動さないで h に isotopic である．これを $Q^n-\mathring{D}^n$（とくに $X\cup\mathring{Q}^n$）を動かさない Q^n 間の ambient isotopy に拡張させる．作り方からこの isotopy は M^n を $M^n\cup B^n$ に移している．

定理 4—6（**正則近傍定理**）

(1) M における X の任意の derived 近傍は正則である．

(2) M における X の任意の2つの正則近傍は X を動さないで同相になる．

(3) $X\subset\mathring{M}$ ならば，$\mathring{M}$ における X の2つの正則近傍は，$X\cup\dot{M}$ を動さないで ambient isotopic になる．

証明　(1) $N=N(X, J')$ を M における X の derived 近傍とする．正則に対する3つの条件を示さなければならない．条件 ① は定義から出てくる．条件 ③ は系4－2から出てくる．② を証明する為には，N の各頂点の link を調べればよい．$L=lk(x, J')$ とする．もし $x\in X$ ならば，$lk(x, N)=L$ は球か球体になる．$x\notin X$ ならば $x\in\mathring{A}$, ただし A は $J-K$ の1つの単体，K は $|K|=X$ となる X の部分複体である．K は J で full だから，$A\cap K=B$ は A の辺になっている．

今 $L=\dot{A}'S$. ただし，S は $(\mathrm{lk}(A, J))'$ と同型だから，S は球か球体である．S は st (A, J) の内部にあるから，X とは交わらない．故に $L\cap X=\dot{A}'\cap X=B'$. したがって $\mathrm{lk}(x, N)=N(B', L)=N(B', \dot{A}'S)=N(B', A')S$. 定理4—3より $N(B', A')$ は，$\dot{A}$ における B の derived 近傍だから球体である．ゆえに $\mathrm{lk}(x, N)$ は球か球体になる．

(2) 定理4—1より任意の正則近傍が derived 近傍と X を動さないで同相となることを示せばよい．N を正則近傍とすると，補題3—5より，J が K に単体的に collapse するように，N, X の三角形分割 J, K を選ぶことができる．

$$J=K_r\searrow K_{r-1}\searrow\cdots\cdots\searrow K_0=K$$

J'' を J の重心的2回 derived 細分，$N_i=N(K_i, J'')$ とすると，N_0 は M における X の derived 近傍で，$N_r=N$ となる．定理4—3の証明の中で，N_i は N_{i-1} に2つの球体をはりつけて得られていた．N_{i-1} は X の近傍だからそれらの球体はいずれも X と交わらない．したがって，定理4—4より，X を動さない同相写像 $N_{i-1}\to N_i$ が存在する．これらを繰り返すと，求める同相 $N_0\to N$ が得られる．

(3) (2) と同様の構成であって，定理4—1と定理4—4の代りに，系3—8と定理4—5を使うと，2つの近傍が $X\cup\dot{M}$ を動さないで，ambient isotopic になっていることがわかる．

系 4—7　$X\subset\mathring{M}$, N と N_1 が M における X の正則近傍であって，$N_1\subset\mathring{N}$ であれば，$N-\mathring{N}_1\cong\dot{N}\times I$ である．

証明　定理4—1の証明における2つの derivd 近傍を作り，$N^*=f^{-1}(0, \varepsilon]$, $N_1^*=f^{-1}(0, \delta]$, ただし $0<\delta<\varepsilon<1$ とする．そのとき，$N^*-\mathring{N}_1^*=f^{-1}[\delta, \varepsilon]\cong f^{-1}\varepsilon\times I=\dot{N}^*\times I$ となる．したがって，N^*, N_1^* に対しては結果が成り立つ．

定理4—6の（2）より，X を動さない同相写像 $h: N^*\to N$ を選ぶと，$h N_1^*$ と N_1 は両方とも $\mathring{N}$ における X の正則近傍である．ゆえに定理4—6の（3）より，$\dot{N}$ では動かない $h N^*_1$ から N_1 への ambient isotopy ができる．ゆえに，$N-\mathring{N}_1\cong N^*-\mathring{N}_1^*=\dot{N}^*\times I=\dot{N}\times I$.

§5 Covering isotopy 定理

定理 5—1　H を，Y を動さないコンパクト support X をもつ Q の ambient isotopy とすると，H_1 は Y を動さないような有限個の moves の積として表わされる．

証明　まずはじめに，Q が組合せ多様体（つまり E^n の中の単体的複体）の場合を証明する．そのとき $Q\times I$ は，$E^n\times I$ における胞複体である．E^n を水平，I を垂直とみなす．

K，L を $H: K\to L$ が単体写像となるような $Q\times I$ の細分，A を L の principal 単体，B を A における vertical line element とする．$\theta(A)$ を，$H^{-1}(B)$ と垂直線との間の角度と定義する．$H: K\to L$ は単体写像だから $\theta(A)$ は B の取り方によらない．H は level preserving だから，$\theta(A)<\frac{\pi}{2}$, $\theta=\max\{\theta(A)\mid A$ が L のすべての principal 単体上を動く$\}$ と定義すると $\theta<\frac{\pi}{2}$.

今，W をすべての線型写像 $Q\to I$ の集合，$W_\delta=\{f\in W: \max f-\min f<\delta\}$ とする．$f\in W$ の

とき，f の graph f^* を，$f^*=1\times f: Q\to Q\times I$ とかくと，f^* は Q の各単体を $E^n\times I$ へ線型に写す．$\varphi(f)$ を f^* Q の任意の単体が水平線となす角度の最大のものとする．$\varepsilon>0$ を与えると，$\delta>0$ が存在して，$f\in W_\delta$ のとき $\varphi(f)<\varepsilon$ となる．なぜなら Q の1単体と比較して，δ を十分小さく選べばよいから．$\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}-\theta$ と選び δ を ε につれて選ぶ．

今 f を W_δ 内の写像，q を Q の点とすると，弧 $H^{-1}(q\times I)$ と f^*Q との交点が唯1つであることを示す．f^* が graph だから f^*Q は補集合 $(Q\times I)-f^*Q$ を graph の上と下に分離する．もし交点がなければ，弧 $H^{-1}(g\times I)$ が下の点 $H^{-1}(q,0)$ と上の点 $H^{-1}(q,1)$ を結ぶから，分離していることに矛盾する．また，各交点において，$\varphi(f)+\theta<\dfrac{\pi}{2}$ だから I によって向きづけられた弧は下から上へ通る．従って交点はたかだか1つである．

$P: Q\times I\to Q$ を第1因子への射影とすると，$k=pHf^*: Q\to Q$ は上の事から 1：1 写像であるから (PL) 同相写像となる．

X と I のコンパクト性より，$f_0(Q)=0$, $f_n(Q)=1$, 各 i に対して f_{i-1} と f_i は，Q の頂点 V_i で一致しているように，W_δ の写像の列 $f_0, f_1, \cdots\cdots, f_n$ を選ぶ．$k_i=pHf_i^*$ と定義すると，$k_0=H_0=id$, $k_n=H_1$ となる．$h_i=k_i k_{i-1}^{-1}$ と定義すると，h_i は $k_i(lk(v_i, Q))$ を動さないような，球体 $k_i(\overline{St}(v_i, Q))$ で Support された Q から Q への同相写像となる．従って h_i は move である．ゆえに $H_1=h_n h_{n-1}\cdots\cdots h_1$ は move の合成である．

H が Y を動さないならば，各 i に対して $k_i|Y=k_0|Y$ だから，各 move h_i も Y を動さない．とくに moves は $Q-X$ を動さないで，X によって support されている．

Q がコンパクト多様体の場合，T を Q の三角形分割とすると，T に対しては定理が証明されたから Q に対しても成り立つ．

Q がコンパクトでない場合，N を Q における X の正則近傍とすると，N はコンパクトな部分多様体であって，$N\cap(\overline{Q-N})\subset Y$ となる．ゆえに $H|N\times I$ は，$N\cap Y$ を動さないような N から N への ambient isotopy である．コンパクトの場合より $H_1|N$ は $N\cap Y$ を動さないような X で support された moves の合成である．moves は，恒等写像によって，Y を動さないような Q から Q への moves に拡張される．故に，H_1 は Q から Q への moves の合成となる．

定理 5—2 (Covering isotopy 定理)　$F: M\times I\to Q\times I$ を $\dot{M}$ を動さない locally unknotted isotopy, N を isotopy による軌跡の近傍とすると，F は $\dot{Q}$ を動さない N で support された ambient isotopy によって被われる．

証明　M は compact で支えられている．まずはじめに Q もコンパクトで，$N=Q$ の場合を考える．

$0<t<1$ ならば，locally unknotted isotopy の定義から F の $[0, t]$, $[t, 1]$ への制限は locally unknotted embedding である．ゆえに t の近傍で F を cover できる．詳しく云えば，各 $t\in I$ に対して，t の I における近傍 $J^{(t)}$ と，$Q\times J^{(t)}$ 間の level preserving 同相 $H^{(t)}$ が存在して，$H^{(t)}$ は $\dot{Q}$ を動さないで，$H_t^{(t)}=1$, しかも下図は可換となることができる．I のコンパクト性より，そのような区間 $J^{(t)}$ の有限個で I を被うことができる．ゆえに $t_1, t_2, \cdots\cdots t_n$ と $0=s_1<$

$$\begin{tikzcd}
Q\times J^{(t)} \arrow[dr, "H^{(t)}"] & \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & Q\times J^{(t)} \\
M\times J^{(t)} \arrow[uu, "F_t\times 1"] \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

$s_2<\cdots\cdots<s_{n+1}=1$ を選んで各 i に対して，$[s_i,\ s_{i+1}]\subset J_{(t_i)}$ とできる．$H^i=H^{(t_i)}$ とかく．

H を i に関する帰納法で次のように定義する．$H_0=1$．$H_t: Q\to Q$ が $0\leq t\leq s_i$ に対して $H_tF_0=F_t$ となるように定義されているとする．そのとき $s_i\leq t\leq s_{i+1}$ に対して，$H_t=H_t^i(H_{s_i}^i)^{-1}H_{s_i}$ と定義する．したがって，$H_tF_0=H_t^i(H_{s_i}^i)^{-1}H_{s_i}F_0=H_t^i(H_{s_i}^i)^{-1}F_{s_i}=H_t^iF_{t_i}=F_t$．ゆえに，すべての $t\in I$ に対して H_t が定義され，$H_tF_0=F_t$ となる．さらに，H は有限個の piecewise linear からできているから，piecewise linear である．しかも各 H^i が $\dot{Q}$ を動さないから，H もまた $\dot{Q}$ を動さない．ゆえに，Q がコンパクトで $N=Q$ の場合の証明は終る．

次に，一般の場合つまり，Q がコンパクトである必要はなく，$N\subset Q$ の場合に証明を拡張させる．任意の近傍は正則近傍を含んでいるから，N は軌跡の正則近傍であるとしてよい．ゆえに．N は Q のコンパクトな部分多様体である．従って，コンパクトの時の証明に帰着できる．

補足 5—3　X を $\dot{Q}$ のコンパクト部分集合．N を Q における X の近傍とすると，X で support された $\dot{Q}$ の ambient isotopy は N で support された Q の ambient isotopy に拡張される．

isotopy F が $\dot{M}$ を動さないという条件を除いた場合は次のようになる．

系 5—4　$F: M\times I\to Q\times I$ を locally unknotted isotopy，N を isotopy によってできた軌跡の近傍とすると，F は N で support された ambient isotopy によって被われる．

証明　T を Q における F の軌跡とする．ただし，M がコンパクトだから T もコンパクト．$\dot{F}: \dot{M}\times I\to\dot{Q}\times I$ を F の境界への制限とする．$\dot{F}$ が locally unknotted だから，$\dot{F}$ も locally unknotted である．X を $\dot{Q}$ における $\dot{F}$ の軌跡 $T\cap\dot{Q}$ の正則近傍，N_0 を Q における X の正則近傍とする．X，N_0 を十分小さく選ぶことによって，与えられた T の近傍 N は N_0 の近傍となる．

定理 5－2 より X で support された $\dot{Q}$ の間の ambient isotopy は $\dot{F}$ を被う．しかも補足 5－3 より，N_0 で support された Q の ambient isotopy G に迄拡張される．そのとき，$G^{-1}F$ は $\dot{M}$ を動さない M から Q への isotopy であって，その軌跡は $T\cup N_0$ の中に含まれている．ところが N は $T\cup N_0$ の近傍であるから，再び定理 5－2 を使って，N で support された Q の ambient isotopy H によって，$G^{-1}F$ を被うことができる．故に GH は N で support された ambient isotopy で，F を被っている．

系 5—5　f，g：$M\to Q$ を，proper locally unknotted embedding とすると，次の 4 つの条件は同値である．

(1)　f，g は locally unknotted isotopy によって isotopic である．

(2)　f，g は ambient isotopic である．

(3) f, g は compact support をもつ ambient isotopy によって, ambient isotopic である.

(4) f, g は moves によって isotopic である.

証明 (1) から (3) は近傍 N として, compact なものが選べるから定理5—2と系5—4から導かれる. (3) から (4) は定理5—1より導かれる. (4) から (2) は各 move が, 恒等写像と ambient isotopic だから補題3—9と系3—10 からでてくる. (2) から (1) は明らかである.

§6 主定理とその証明

主定理 6—1 K を n 次元ユークリッド空間 R^n に埋め込まれている k 次元複体, N を R^n における K の任意の正則近傍, f を N^n から m 次元ユークリッド空間 R^n への locally unknotted な embedding とする. $m-k\geq 3$, $m-n<3$ のとき, $\pi_1(R^m-f(N))=\{e\}$ が成り立つ.

注意 $K^k\subset R^n$ と $N^n\subset R^m$ の embed は $K\subset N^n\subset R^m$ となる embed を意味しているのではない. K を R^n に embed した時の正則近傍 N を改めて別の R^m に embed させたものである. この相異は, たとえば $K=S^1$, $R^n=R^2$, $R^m=R^3$ のときを考えるとよい. 実際, $S^1\subset R^2$ のときの正則近傍を $N(S^1, R^2)$ とすると, それは R^2 内で $S^1\times I$ となる. $S^1\subset N^2\subset R^2\subset R^3$ (ただし, $R^2\subset R^3$ は自然な包含写像 i で embed しているとする) のときの近傍の像 $i(N(S^1, R^2))$ と, f; $N^2\rightarrow R^3$ (ただし, f は N^2 を R^3 で knot させて embed させた写像とする) のときの近傍の像 $f(N(S^1, R^2))$ とは R^3 において, 全く異なる.

主定理の証明の為に2つの補題を準備する.

補題 6—2 $m-k\geq 3$ ならば $\pi_1(R^m-f(K))=\{e\}$

証明 $\pi_1(R^m-f(K))$の任意の元を $\{\varphi\}$ とし, 連続写像 φ; $S^1\rightarrow(R^m-f(K))$をその代表元とする. $\varphi(S^1)=\partial E^2$ となる任意の E^2 を考える. 仮定より $m-\dim f(K)=m-k\geq 3$ だから, E^2 と $f(K)$ を一般の位置で考えると E^2 と $f(K)$ とは交わらない. ゆえに, $R^m-f(K)$での閉曲線$\varphi(S^1)$は R^m での閉曲線と考えられる. つまり $\{\varphi\}\in\pi_1(R^m)$. ところが $\pi_1(R^m)=\{e\}$ だから, $\{\varphi\}=\{e\}$. ゆえに, $\pi_1(R^m-f(K))=\{e\}$.

注意 補題 6—2より, $m-n\geq 3$ ならば $\pi_1(R^m-f(N))=\{e\}$ となる. ゆえに, 主定理は $m-n<3$ のときを考える.

補題 6—3 $\pi_1(R^m-N')=\{e\}$ となる $f(K)$ に十分近い $f(K)$ の正則近傍 N′ が存在する.

証明 まずはじめに, $f(K)$に十分近い正則近傍を作る. $f(N)^{(1)}$ を $f(K)$の正則近傍 $f(N)$の第1回重心細分とすると. $\mathrm{mesh}\, f(N)^{(1)}\leq\frac{n}{n+1}\,\mathrm{mesh}\, f(N)$ が成り立つ〔12, P124〕. ただし $\mathrm{mesh}\, f(N)$ とは, $f(N)$ に含まれる全ての単体の直径の上限である. $|\frac{n}{n+1}|<1$ だから, 重心細分の回数 m を十分大きくすると, 任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して $\mathrm{mesh}\, f(N)^{(m)}\leq(\frac{n}{n+1})^N\,\mathrm{mesh}\, f(N)<\varepsilon$ となる. 今 N′ を $f(N)^{(m)}$ における K の正則近傍とすると, この N′ は $f(K)$ に十分近い正則近傍となる.

次に, この N′ が $\pi_1(R^m-N')=\{e\}$ となるようにとれることを云う.

$\{\varphi\}$ を $\pi_1(R^m-f(K))$ の任意の元とし，φ ; $S^1 \to (R^m-f(K))$ をその代表元とする．補題６―2より，$\pi_1(R^m-f(K))=\{e\}$ だから，$\varphi(S^1)$ を境界とする任意の E^2 に対して $E^2 \cap f(K)=\phi$ となる．つまり，E^2 と $f(K)$ の距離は，正数 $d(E^2, f(K))=\delta>0$ となる．証明のはじめの部分よりN′は mesh $N'<\varepsilon<\delta$ となるように作ることができる．従って，$d(E^2, N)>\delta-\varepsilon>0$ となる．ゆえに $(R^m-f(K))$ での閉曲線 $\varphi(S^1)$ を (R^m-N') での閉曲線 $\varphi(S^1)$ とし，φ ; $S^1 \to (R^m-N')$ を代表とする類を $\{\varphi\}$ とすると，E^2 と N′ は交わらないから $\{\varphi\}=\{e\}$ となる．

主定理の証明　補題６―３における N′ の作り方より，$f(K) \subset R^m$ で，$f(N)$ と N′ とは R^m における $f(K)$の正則近傍である．しかも $N' \subset \mathrm{Int}\, f(N)$ となっている．したがって，正則近傍定理４―６の系４―７が適用できて，$f(N)-\mathring{N}' \cong (f(N))^{\cdot} \times I$ となる．

今Iに沿って，isotopy を作ると $f(N)$ と N′ とは locally unknotted isotopy によって，isotopic になる．ゆえに Covering isotopy 定理５―２の系５―５より，$f(N)$ と N′ とは ambient isotopic になる．ところが補題６―３より $\pi_1(R^m-N')=\{e\}$ だから，求める結果 $\pi_1(R^m-f(N))=\{e\}$ が得られる．

付記．本稿作成にあたって，諸々御助言下さった，大阪市立大学理学部教授，田尾鶉三博士に厚く感謝致します．尚，本稿の一部は，1973年，Combinatorial Topology 夏季研究集会において発表した。

参　考　文　献

[1] M. M. Cohen, Homeomorphism between homotopy manifolds and their resolution, Inventions Math. 10. (1970) 239—250.

[2] L. C. Glaser, On Suspension of homology spheres, Lecture notes in Mathematics. 197. Manifolds-Amsterdam, Spriger-Verlag. (1970). 8—16

[3] L. C. Glaser, Geometrical combinatorial topology vol. 1, Van Nostrand Reinhold (1970)

[4] J. F. P. Hudson, Piecewise Linear Topology, Benjamin. (1969)

[5] M. Kervaire, A manifold which does not admit ang differentiable stracture, Comment. Math. Helv. 34. (1960) 257—270.

[6] M. Kervaire and J. Milnor, Groups of homotopy spheres I, Ann. of Math. 77 (1963) 504—537.

[7] R. C. Kirby, Lectures on triangulations of manifolds, Lecture Notes. UCLA (1969)

[8] R. C. Kirby and L. C. Siebenman, On the triangulation of manifolds and Hauptvermutung, Bull. Amer. Hath. Soc. 75 (1969) 742—749.

[9] J. Milnor, On manifolds homeomorphic to S^7, Ann. Math. 64 (1956) 399—405

[10] J. Munkres, Elementary differential topology (1963) princeton.

[11] L. C. Siebenmann. Are non-triangulable manifolds triangulable ?, Proc. Athens. Georgia topology conference. August. (1969)

[12] E. H. Spanier, Algebraic topebraic topology, Mcgraw—Hill (1966)

[13] D. Sullivan, Lecture at the 1969 Georgia Topology Conference (paper to appear)

[14] E. C. Zeeman. Seminar on combinatorial topology (Mimeographed notes), Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1963)

ON TRIANGULATION OF TOPOLOGICAL MANIFOLD

AKIE TAMAMURA

In this paper we obtain the next theorem.

Theorem

Suppose K is a k-dimentional simplicial complex embedded to n-dimentional euclid space R^n, and N is a pieceweise linear manifold which is a regular neighborhood of K in R^n and collapses to K. Suppose f; $N \longrightarrow R^m$ is a locally unknotted embedding map. Then, $\pi_1(R^m - f(N)) = \{e\}$ for $m-k \geq 3$, $m-n < 3$.

Outline of proof

First we obtain that if $m-k \geq 3$, $m-n < 3$, then $\pi_1 (R^m - f(K)) = \{e\}$ (lemma 6-2). Next we obtain the regular neighborhood N′ of f(K) such that $\pi_1(R^m - N') = \{e\}$ and N′ approaches well enough f(K) (lemma 6-3).

f(N) and N′ are regular neighborhoods of f(K) in R^m, and N′ $\subset$ Int f(N). therefore from collorally 4-7 of regular neighborhood theorem 4-6, $f(N) - \mathring{N}' \cong f((N))^{\cdot} \times \mathrm{I}$.

Now let make a isotopy along the I, then f(N) and N′ are isotopic by locally unknotted isotopy. Therefore from collorally 5-5 of covering isotopy theorem 5-2, f(N) and N′ are ambient isotopic. But $\pi_1(R^m - \mathrm{N}') = \{e\}$, so we obtain $\pi_1(R^m - f(N)) = \{e\}$.

Okayama college of science.